Matematyka Dyskretna

Jarosław Grytczuk

1 O trudnej sztuce liczenia

1.1 Zasada Mnożenia

Jolanta K. (imię i inicjał fikcyjne) wybiera się na koncert charytatywny. Jak zwykle w takich wypadkach staje przed kolosalnym problemem wyboru kreacji oraz zestawu dodatków: kapelusza, torebki i butów. Po krótkiej dyskusji z mężem, który zawsze doradza jej w tych sprawach, okazało się, że w grę wchodzą 3 kapelusze, 6 torebek i 4 pary butów.

Ile jest wszystkich możliwych sposobów zestawienia tych dodatków?

Po chwili namysłu Jolanta K. zdobywa absolutną pewność, wszystkich możliwości jest 72. W istocie, do każdego z 3 kapeluszy można dobrać jedną z 6 torebek, co daje $3 \cdot 6 = 18$ par (kapelusz, torebka). Teraz, do *każdego* z tych 18 układów może jeszcze dobrać jedną z 4 par butów, co daje $18 \cdot 4 = 72$ zestawy (kapelusz, torebka, buty). Liczba wszystkich możliwości jest więc równa iloczynowi $3 \cdot 6 \cdot 4$. Ile spośród nich zaspokoi wyrafinowany gust Jolanty—to już zupełnie inna historia.

Powyższy przykład jest ilustracją ogólnej zasady, którą formułujemy następująco.

Twierdzenie 1 (Zsada Mnożenia) *Niech $A_1, A_2, ..., A_n$ będą zbiorami skończonymi. Wówczas liczba ciągów $(a_1, a_2, ..., a_n)$, gdzie $a_i \in A_i$, $i = 1, 2, ..., n$, wynosi $|A_1| \cdot |A_2| \cdot ... \cdot |A_n|$.*

Powyższa zasada pozwala na "przeliczanie" wielu fundamentalnych struktur pojawiających się w kombinatoryce. Oto kilka najprostszych sytuacji, w których jej zastosowanie daje natychmiastowy efekt.

Ciągiem binarnym nazywamy ciąg złożony z zer i jedynek (ogólniej, z elementów dwojakiego rodzaju). Ile jest ciągów binarnych długości k?

Wniosek 2 *Mamy 2^k ciągów binarnych długości k. Ogólniej, istnieje n^k ciągów długości k na zbiorze n symboli.*

Dowód. Wystarczy zastosować Zasadę Mnożenia przyjmując $A_1 = A_2 = ... = A_n = \{0, 1, ..., n-1\}$. ■

Jedna z torebek Jolanty posiada zamek szyfrowy. Szyfr jest ciągiem czterech cyfr ze zbioru $\{1, 2, ..., 9\}$. Niestety Jola pamięta tylko, że żadna cyfra nie była w nim powtórzona. Ile możliwości w najgorszym razie będzie musiała sprawdzić aby otworzyć torebkę?

Pierwsza cyfra szyfru może być każdą z 9 możliwych. Za drugim razem mamy już do wyboru tylko 8 cyfr, ponieważ nie możemy powtórzyć tej, która stoi na pierwszym miejscu. Za trzecim razem wybieramy już tylko jedną z 7, a za czwartym jedną z 6 pozostałych cyfr, co daje łączną liczbę $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$ wszystkich możliwych kombinacji.

Wniosek 3 *Liczba ciągów długości k na n symbolach, w których żaden z nich nie został powtórzony wynosi $n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-(k-1))$.*

Ściśle rzecz biorąc, zastosowaliśmy tu nieco ogólniejsze prawo, które można sformułować następująco.

Twierdzenie 4 (Ogólna Zasada Mnożenia) *Jeżeli pewna procedura może być rozbita na k kolejnych kroków, z r_1 wynikami w pierwszym kroku, r_2 wynikami w drugim kroku,..., r_k wynikami w k-tym kroku, to w całej procedurze mamy $r_1 \cdot r_2 \cdot ... \cdot r_k$ łącznych wyników (rozumianych jako uporządkowane ciągi wyników cząstkowych).*

Ciąg długości $k = n$ utworzony z n niepowtarzających się symboli nazywamy *permutacją*.

Wniosek 5 *Istnieje $n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 1 = n!$ permutacji n symboli.*

Na przykład, jeśli $n = 3$, to mamy $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ permutacji zbioru $\{1, 2, 3\}$:

$$123, 132, 213, 231, 312, 321.$$

Ćwiczenie 6 *(1) Ile jest liczb 5-cyfrowych? (2) Ile jest parzystych liczb 5-cyfrowych? (3) Ile liczb 5-cyfrowych zawiera dokładnie jedną trójkę? (4) Ile jest palindromicznych liczb 5-cyfrowych?*

1.2 Zasada Bijekcji

Sala teatru, w której odbywają się koncerty liczy 500 miejsc. Obserwując ze swej loży powoli zapełniającą się salę Jolanta K. zastanawia się ilu melomanów wysłucha dzisiejszego koncertu. Tuż przed rozpoczęciem wpada na salę trzech zdyszanych posłów radykalnego ugrupowania *Selfdefence*, którzy zajmują trzy ostatnie miejsca, sala jest wypełniona po brzegi. W tym momencie Jolanta uświadamia sobie potęgę abstrakcyjnego rozumowania—oto na sali znajduje się w tej chwili dokładnie 500!

Bijekcją nazywamy funkcję różnowartościową $f : A \to B$, dla której $f(A) = B$.

W powyższym przykładzie mamy A—zbiór melomanów na koncercie, B—zbiór miejsc w auli, a $f(x)$ oznacza miejsce zajęte przez malomana x. Funkcja f oczywiście jest bijekcją ponieważ dwie osoby nie siedzą na jednym miejscu i żadne miejsce w sali nie pozostało puste.

Twierdzenie 7 (Zasada Bijekcji) *Niech A i B będą zbiorami skończonymi. Jeśli istnieje bijekcja $f : A \to B$, to $|A| = |B|$.*

Sama zasada jest tak oczywista, że może się wydać trywialna. Sztuka w posługiwaniu się nią w konkretnych sytuacjach polega na tym, aby dostrzec bijekcję pomiędzy interesującym nas zbiorem, a zbiorem, którego liczbę elementów już znamy. Nie zawsze jest to łatwe.

Twierdzenie 8 *Zbiór n-elementowy ma 2^n podzbiorów.*

Dowód. Niech $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ będzie dowolnym zbiorem k-elementowym i niech $\mathcal{P}(X)$ oznacza rodzinę wszystkich podzbiorów X. Wskażemy bijekcję między rodziną $\mathcal{P}(X)$ a zbiorem $\mathcal{B}_n$ ciągów binarnych długości n. Dla każdego $S \subseteq X$ niech $f(S) = b_1 b_2 ... b_n$ gdzie $b_i = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_i \in S$. Na przykład, jeśli $X = \{1, 2, 3, 4\}$ i $S = \{2, 4\}$, to $f(S) = 0101$. Ponadto $f(\emptyset) = 0000$ i $f(X) = 1111$. Jest jasne, że f jest bijekcją. Zatem

$$|\mathcal{P}(X)| = |\mathcal{B}_n| = 2^n.$$

■

Co roku w czasie obchodów Święta P. mąż Jolanty K., Aleksander (imię fikcyjne) dokonuje wyboru 3-osobowej delegacji spośród licznego grona swoich 34 sekretarzy (obojga płci).

Ile jest różnych możliwości utworzenia takiej delegacji?

Możemy rozumować następująco: najpierw wybieramy jedną osobę z 34, potem kolejną z 33 i ostatnią z 32. To daje $34 \cdot 33 \cdot 32$ możliwości. Zauważmy jednak, że w ten sposób jedna i ta sama delegacja została policzona 6 razy! W istocie, każda trójka osób mogła wystąpić w sześciu różnych kolejnościach (*permutacjach*). Kolejność losowania delegatów nie odgrywa tu jednak żadnej roli, zatem, prawdziwa liczba różnych delegacji to

$$\frac{34 \cdot 33 \cdot 32}{6} = 5984.$$

Liczbę k-elementowych podzbiorów zbioru n-elementowego oznaczamy symbolem $\binom{n}{k}$. Symbol ten nosi nazwę *współczynnika dwumianowego* lub *symbolu Newtona*.

Twierdzenie 9 *Liczba k-elementowych podzbiorów zbioru n-elementowego wyraża się wzorem*

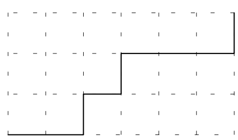
$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 1}.$$

Dowód. Niech X oznacza zbiór ciągów bez powtórzeń długości k na n symbolach $N = \{1, 2, ..., n\}$. Każdemu podzbiorowi k-elementowemu $S \subseteq N$ odpowiada zbiór $f(S) \subseteq X$ składający się z $k!$ permutacji zbioru S. Oczywiście podzbiory $f(S)$ tworzą podział zbioru X na rozłączne równoliczne części, a funkcja f ustala bijekcję między podzbiorami S a częściami tego pdziału. Stąd

$$\binom{n}{k} = \frac{|X|}{k!}$$

co kończy dowód. ■

Problem 10 (Ulice Manhattanu) *Manhattan, dzielnica Nowego Yorku, słynie z ulic wytyczonych pod kątem prostym. Wyobraźmy sobie kratę utworzoną z 4 ulic biegnących poziomo (wschód-zachód) i 7 alei biegnących pionowo (północ-południe).*



Znajdujemy się w lewym dolnym rogu A i chcemy przejść najkrótszą drogą do prawego górnego rogu B. Na ile sposobów możemy to zrobić?

Każda najkrótsza droga z A do B składa się z 9 odcinków, w tym 6 w prawo i 3 w górę. Wyobraźmy sobie, że idąc taką drogą "kodujemy" ją zapisując 0 po każdym odcinku w prawo i 1 po każdy odcinku w górę. Na przykład, droga na powyższym rysunku otrzyma kod

001010001

Operacja kodowania dróg ustala bijekcję między drogami a ciągami binarnymi długości 9 z dokładnie 3 jedynkami i 6 zerami. Z kolei tych ostatnich jest tyle ile jest 3-elementowych podzbiorów zbioru 9-elementowego. Wszystkich najkrótszych dróg jest więc

$$\binom{9}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84.$$

Tak samo przebiega dowód ogólnego twierdzenia.

Twierdzenie 11 *Liczba najkrótszych dróg z A do B w prostokątnej kracie o wymiarach k na l wynosi $\binom{k+l}{k}$.*

Dowód. Każda najkrótsza droga z A do B składa się z $n = k + l$ odcinków: k w górę i l w prawo. Wybierając drogę wybieramy tym samym k-elementowy podzbiór w zbiorze n-elementowym. Że procedura ta ustala bijekcję między drogami a podzbiorami jest oczywiste. ■

Problem 12 *Przypuśćmy, że mamy pomalować sześć identycznych kul czterema kolorami. Na ile sposobów możemy to zrobić?*

Wyobraźmy sobie, że mamy 4 puszki z farbami różnych kolorów ponumerowane cyframi $1, 2, 3, 4$ i że malujemy kule po prostu wrzucając je do tych puszek. Niech t_i oznacza liczbę kul wrzuconych do puszki z numerem i. Liczba sposobów pomalowania sześciu kul jest więc równa liczbie rozwiązań równania

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 6$$

w liczbach całkowitych nieujemnych. Ta zaś jest równa liczbie dróg w kracie 3 na 6. Rzeczywiście, wystarczy utożsamić 4 poziome ulice z 4 puszkami, a 6 kul z odcinkami w prawo. Ta operacja ustala odpowiednią bijekcję, zatem, mamy $\binom{9}{3}$ sposoby pomalowania kul. Podobnie jak poprzednio, nietrudno ugólnić tę obserwację na dowolną liczbę kul i kolorów.

Twierdzenie 13 *Liczba sposobów pomalowania n jednakowych kul k kolorami jest równa $\binom{n+k-1}{k-1}$.*

Dowód. Rozważmy kratę o wymiarach $(k-1)$ na n. Oznaczmy poziome ulice od dołu $t_1, t_2, ..., t_k$. Każda najkrótsza droga D z punktu A do punktu B określa sposób kolorowania kul: malujemy kolorem j tyle kul ile jest odcinków w prawo ulicą x_j na drodze D. Ta reguła określa bijekcję między drogami a kolorowaniami, co kończy dowód. ■

Problem 14 *Na brzegu koła znajduje się n punktów połączonych wszystkimi możliwymi odcinkami. Punkty są tak rozmieszczone, że żadne trzy odcinki nie przecinają się w jednym punkcie wewnątrz koła. Na ile części rozpadnie się koło rozcinane wzdłuż tych odcinków?*

2 Współczynniki dwumianowe

2.1 Własności współczynników $\binom{n}{k}$

Twierdzenie 15 *Dla dowolnych liczb całkowitych* $0 \leq k \leq n$ *zachodzi wzór*

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Dowód. Wzór wynika natychmiast z Twierdzenia 11 i z tego, że liczba dróg w kracie $k \times n-k$ jest taka sama jak w kracie $n-k \times k$. ■

Twierdzenie 16 *Niech* k *i* n *będą dowolnymi liczbami całkowitymi, przy czym* $1 \leq k \leq n$. *Wówczas*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Dowód. Rozważmy kratę wymiaru $k \times n-k$. Niech X i Y będą dwoma najbliższymi punktami od prawego górnego rogu B. Jest jasne, że każda najkrótsza droga z A do B wiedzie przez dokładnie jeden z tych punktów. Zatem łączna liczba dróg, która, na mocy Twierdzenia 11, wynosi $\binom{n}{k}$, jest sumą liczby dróg przechodzących przez X i liczby dróg przechodzących przez Y, które wynoszą odpowiednio $\binom{n-1}{k}$ i $\binom{n-1}{k-1}$. ■

Powyższa własność pozwala na ustawienie współczynników dwumianowych w charakterystyczny *Trójkąt Pascala*:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 5 1
. . . .

Twierdzenie 17 *Dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y oraz dowolnej liczby naturalnej n zachodzi wzór*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Dowód. Po wymnożeniu nawiasów w wyrażeniu

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)(x+y)...(x+y)}_{n \text{ czynników}}$$

otrzymamy sumę składników postaci $x^k y^{n-k}$, przy czym każdy taki składnik będzie występował tyle razy na ile różnych sposobów możemy wybrać k spośród n nawiasów, czyli $\binom{n}{k}$. ■

Wniosek 18 *Suma wszystkich liczb w n-tym wierszu Trójkąta Pascala wynosi 2^n:*

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + ... + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Dowód. W istocie, wystarczy podstawić $x = y = 1$ w Twierdzeniu 17. Oczywiście fakt ten wynika również bezpośrednio z definicji współczynników dwumianowych i Twierdzenia 8. ■

Wniosek 19 *Naprzemienna suma wszystkich liczb n-tego wiersza Trójkąta Pascala wynosi 0:*

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - ... + (-1)^n \binom{n}{n} = 0.$$

Dowód. Tym razem wystarczy położyć w Twierdzeniu 17 $x = 1$ i $y = -1$. ■

Problem 20 *W kolejce do kina stoi n osób, które są wpuszczane do kina grupami (kolejność osób w kolejce nie zmienia się). Na ile sposobów można utworzyć k niepustych grup przy wpuszczaniu osób do kina?*

Podziału kolejki można dokonać wybierając $k-1$ spośród $n-1$ miejsc, w których możnaby wstawić przegrody odzielające kolejne grupy osób:

$$\begin{array}{ccccccccc} 123 & \perp & 45 & \perp & 6789 & \perp & ... & \perp & r...n \\ & 1 & & 2 & & 3 & ... & k-1 & \end{array}$$

Stąd, liczba wszystkich możliwości wynosi $\binom{n-1}{k-1}$.

Problem 21 *Ile rozwiązań ma równanie*

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$$

w dodatnich *liczbach całkowitych?*

Odpowiedź jest taka sama jak w przypadku problemu podziału kolejki. W istocie, przyjmując za x_i liczebność i-tej grupy otrzymamy bijekcję między podziałami kolejki a rozwiązaniami równania.

Problem 22 *W poczekalni do lekarza, w rzędzie złożonym z n krzeseł, siedzi k pacjentów, przy czym żadnych dwóch nie znajduje się obok siebie. Ile jest różnych sposobów takiego usadzenia pacjentów?*

Siedzący pacjenci rozdzielają wolne krzesła, których jest $n-k$, na $k+1$ grup, przy czym pierwsza i ostatnia grupa mogą być puste. Sposobów usadowienia pacjentów jest więc tyle ile wyborów k spośród $n-k-1+2$ miejsc, czyli $\binom{n-k+1}{k}$:

$$\begin{array}{cccccccccc} \perp & 123 & \perp & 45 & \perp & \ldots & \perp & r\ldots(n-k-1) & \perp \\ 1 & & 2 & & 3 & & k-1 & & k \end{array}$$

Problem 23 *Pokazać, że*

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

O prawdziwości tego wzoru przekonamy się trzema różnymi sposobami.

Sposób I: Zastosujemy Twierdzenie 17. Porównując współczyniki przy x^n po obu stronach równania $(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n$, dostajemy

$$\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}\cdot\binom{n}{n} + \binom{n}{1}\cdot\binom{n}{n-1} + \ldots + \binom{n}{n}\cdot\binom{n}{0}$$

$$= \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2.$$

Sposób II: Z grupy składającej się z n mężczyzn i n kobiet wybieramy n osobową delegację. Z jednej strony liczba wyborów to oczywiście $\binom{2n}{n}$. Z drugiej strony możemy wybierać najpierw k kobiet a potem $n-k$ mężczyzn. Wówczas, na mocy zasady mnożenia liczba takich grup wyniesie $\binom{n}{k}\cdot\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}^2$. Ponieważ k może przyjmować dowolną spośród wartości od 0 do n więc łączna liczba sposobów wynosi $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$.

Sposób III: Zliczymy na dwa sposoby najkrótsze drogi w kracie $n \times n$. Bezpośrednie zastosowanie Twierdzenia 11 daje w wyniku liczbę $\binom{2n}{n}$. Z drugiej strony, rozważmy $n+1$ punktów na przekątnej Północ-Wschód. Każda z dróg przechodzi przez dokładnie jeden z tych punktów, a ich liczba wynosi ponownie $\binom{n}{k}^2$ w przypadku punktu znajdującego się na wysokości k.

Problem 24 *W kolejce po lody w cenie 1 zł stoi $n+k$ osób. Na początku sprzedawca nie ma pieniędzy. Ponadto, dokładnie n osób ma tylko monetę 1 zł, a pozostałych k tylko monetę 2 zł. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w każdym momencie sprzedawca będzie miał odpowiednią ilość drobnych pieniędzy, aby obsłużyć kolejnego klienta?*

2.2 Współczynniki wielomianowe

Ile różnych anagramów można ułożyć z liter słowa MATEMATYKA? Słowo to składa się z 10 liter, przy czym A występuje 3 razy, M i T po 2 razy, a E, K, Y raz. Szukana liczba jest więc iloczynem

$$\binom{10}{3} \cdot \binom{7}{2} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{1}{1} = \frac{10!}{3! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!}.$$

Definicja 25 *Liczbę $\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot ... \cdot k_r!}$, gdzie $k_1 + k_2 + ... + k_r = n$, $k_i \geq 0$, nazywamy wspólczynnikiem wielomianowym i oznaczamy symbolem*

$$\binom{n}{k_1, k_2, ..., k_r}.$$

Zauważmy, że zwykły współczynnik dwumianowy jest szczególnym przypadkiem współczynnika wielomianowego przy $r = 2$. Zauważmy ponadto, że współczynnik wielomianowy $\binom{n}{k_1, k_2, ..., k_r}$ określa liczbę podziałów zbioru n-elementowego na r rozłącznych części A_i takich, że $|A_i| = k_i$.

Twierdzenie 26 *Dla dowolnych liczb rzeczywistych $x_1, x_2, ..., x_r$ i dowolnej liczby naturalnej n zachodzi wzór*

$$(x_1 + x_2 + ... + x_r)^n = \sum_{\substack{k_1, ..., k_r \geq 0 \\ k_1 + ... + k_r = n}} \binom{n}{k_1, k_2, ..., k_r} x_1^{k_1} x_2^{k_2} ... x_r^{k_r}.$$

Dowód. Argument przebiega analogicznie jak w przypadku Twierdzenia 17. Przy ustalonym ciągu $(k_1, ..., k_r)$ takim, że $k_1 + ... + k_r = n$ i $k_i \geq 0$, liczba składników postaci $x_1^{k_1} x_2^{k_2} ... x_r^{k_r}$ po otworzeniu nawiasów z lewej strony będzie równa liczbie podziałów zbioru tych nawiasów na r części rozmiaru k_i odpowiadające zmiennym x_i. ■

Podobnie jak Twierdzenie 17, powyższe Twierdzenie prowadzi do szeregu wniosków przedstawiających kombinatoryczne własności współczynników wielomianowych. Ich sformułowanie pozostawiamy jako dodatkowe ćwiczenie.

3 Indukcja

Jednym z najważniejszych narzędzi w Matematyce Dyskretnej jest *metoda indukcji.* Przedstawimy jej działanie na przykładzie następującego problemu dotyczącego sumy kolejnych liczb nieparzystych.

Problem 27 *Ile jest równa suma n początkowych liczb nieparzystych?*

Po wykonaniu obliczeń dla kilku początkowych wartości k odpowiedź narzuci się sama:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 1+3 &= 4 \\ 1+3+5 &= 9 \\ 1+3+5+7 &= 16 \\ 1+3+5+7+9 &= 25 \end{aligned}$$

Ogólnie,

$$1+3+5+...+(2n-1) = n^2.$$

Aby uzasadnić prawdziwość tego wzoru dla wszystkich liczb naturalnych n zastosujemy następującą argumentację. Po pierwsze widzimy, że wzór jest prawdziwy dla $n = 1, 2, 3, 4, 5$. Po drugie, pokażemy, że fakt prawdziwości tego wzoru dla pewnej liczby naturalnej k pociąga za sobą jego prawdziwość dla następnej liczby naturalnej $k + 1$. W istocie jeżeli zachodzi równość

$$1+3+5+...+(2k-1) = k^2$$

to mamy również

$$1+3+5+...+(2k-1)+(2k+1) = k^2+2k+1 = (k+1)^2.$$

Zatem, stosując udowodnioną właśnie implikację "$k \Rightarrow k + 1$" wnioskujemy o prawdziwości wzoru dla wszystkich liczb naturalnych n.

Powyższe rozumowanie opiera sie na aksjomacie zwanym *Zasadą Indukcji Matematycznej*, którego ogólne sformułowanie jest następujące. Jeżeli o pewnym zbiorze S wiemy, że (1) $n_0 \in S$ oraz (2) $k \in S$ *pociąga* za sobą $k + 1 \in S$, to wówczas *każda* liczba naturalna $n \geq n_0$ jest elementem zbioru S.

Zasada ta odpowiada następującej elementarnej intuicji: skoro $n_0 \in S$, to na mocy warunku (2) również $n_0 + 1 \in S$, skoro zaś $n_0 + 1 \in S$, to również na mocy warunku (2) $n_0 + 2 \in S$. Podobnie stąd wnosimy, że $n_0 + 3 \in S$, $n_0 + 4 \in S$, itd.

W powyższym przykładzie S jest zbiorem tych liczb naturalnych n, dla których suma n początkowych liczb nieparzystych wynosi n^2.

Oto kolejny przykład użycia metody indukcji. Pokażemy, że dla $n \geq 0$

$$F_0 \cdot F_1 \cdot ... \cdot F_n = F_{n+1} - 2$$

gdzie $F_k = 2^{2^k} + 1$ jest k-tą liczbą Fermata. Sprawdźmy, że wzór jest prawdziwy dla kilku początkowych n:

$$F_0 = 3 = 5 - 2 = F_1 - 2$$

$$F_0 \cdot F_1 = 3 \cdot 5 = 15 = 17 - 2 = F_2 - 2$$

$$F_0 \cdot F_1 \cdot F_2 = 3 \cdot 5 \cdot 17 = 255 = 257 - 2 = F_3 - 2.$$

Teraz pokażemy, że jego prawdziwość dla pewnego k pociąga za sobą prawdziwość dla kolejnej liczby $k + 1$. W istocie, jeżeli zachodzi

$$F_0 \cdot F_1 \cdot ... \cdot F_k = F_{k+1} - 2,$$

to wówczas mamy

$$F_0 \cdot F_1 \cdot ... \cdot F_k \cdot F_{k+1} = (F_{k+1} - 2) \cdot F_{k+1} = F_{k+1}^2 - 2F_{k+1} =$$

$$(2^{2^{k+1}} + 1)^2 - 2 \cdot 2^{2^{k+1}} - 2 = 2^{2^{k+2}} + 2 \cdot 2^{2^{k+1}} + 1 - 2 \cdot 2^{2^{k+1}} - 2 =$$

$$2^{2^{k+2}} + 1 - 2 = F_{k+2} - 2.$$

To dowodzi prawdziwości wzoru dla każdej liczby naturalnej $n \geq 0$, na mocy Zasady Indukcji.

Istnieje wiele sytuacji, w których wykorzystanie indukcji nie sprowadza się jedynie do rutynowych czynności, lecz wymaga dodatkowej inwencji i pomysłowości. Oto dwa takie przykłady.

Problem 28 (Wzór Eulera) *Dla dowolnego wielościanu sferycznego o V wierzchołkach E krawędziach i F ścianach zachodzi wzór*

$$V - E + F = 2.$$

Uzasadnimy prawdziwość wzoru stosując indukcję ze względu na liczbę wierzchołków V. Dla najmniejszego możliwego wielościanu mamy $V = 4$, $E = 6$ i $F = 4$, a więc wzór jest prawdziwy. Następnie załóżmy, że wzór zachodzi dla każdego wielościanu o liczbie wierzchołków $V' < V$

i niech W będzie dowolnym wielościanem sferycznym o V wierzchołkach. Niech v będzie dowolnym wierzchołkiem tego wielościanu i niech d_v oznacza liczbę krawędzi wychodzących z wierzchołka v. Rozważmy teraz wielościan W' powstający przez usunięcie wierzchołka v wraz ze wszystkimi wychodzącymi zeń krawędziami. Zgodnie z naszym założeniem indukcyjnym dla wielościanu W' prawdziwy już jest wzór Eulera

$$V' - E' + F' = 2.$$

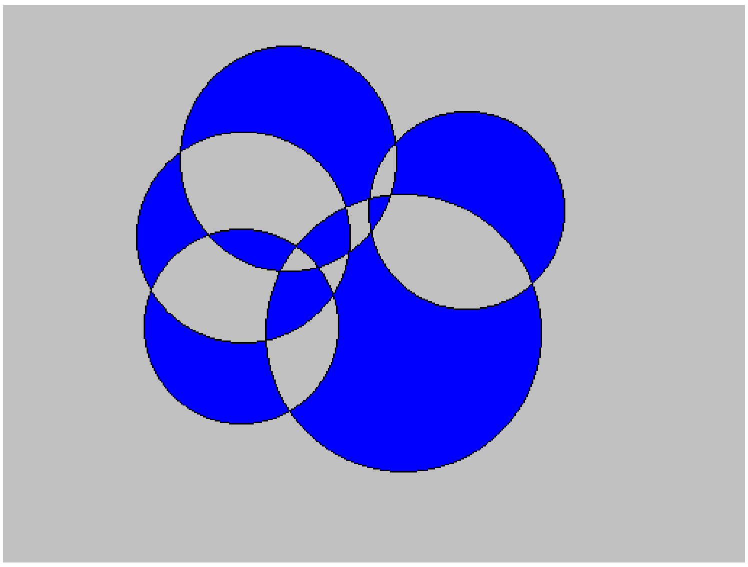
(Nawet jeśli W' jest tylko wielokątem, to i tak wzór zachodzi ponieważ $V' = E'$ i $F' = 2$.) Ale $V' = V - 1$, $E' = E - d_v$ i $F' = F - d_v + 1$, zatem

$$(V - 1) - (E - d_v) + (F - d_v + 1) = 2$$

czyli

$$V - E + F = 2.$$

Problem 29 *Kolekcja n okręgów na płaszczyźnie dzieli ją na pewną liczbę regionów, w tym jeden nieograniczony. Chcemy tak pokolorować te regiony by dowolne dwa z nich mające wspólny łuk były różnokolorowe. Ile kolorów potrzebujemy do takiego pokolorowania?*



Odrobina eksperymentu przekonuje nas, że powinny wystarczyć dwa kolory. Udowodnimy to stosując indukcję ze względu na liczbę okręgów. Jeżeli $n = 1$, to mamy dwa regiony, a więc zadanie jest banalne. Załóżmy teraz, że dwa kolory wystarczą dla każdej kolekcji k okręgów i rozważmy dowolną kolekcję składającą się z $k + 1$ okręgów. Usuńmy jeden z nich i pomalujmy regiony dwoma kolorami zgodnie z regułą, aby sąsiadujące regiony były w różnych kolorach. Teraz przywróćmy usunięty okrąg i rozważmy następującą modyfikację poprzedniego kolorowania. Kolory regionów znajdujących się na zewnątrz usuniętego okręgu zostają nie zmienione, natomiast wewnątrz zmieniamy kolor każdego regionu na przeciwny. Przekonajmy się, że to nowe kolorowanie jest dobre. W istocie, jeżeli dwa sąsiednie regiony znajdują się na zewnątrz, to nic się dla nich nie zmieniło. Jeżeli oba są wewnątrz, to ich kolory zmieniły się na przeciwne i teraz nadal są w różnych kolorach. Jeśli zaś jeden znich jest na zewnątrz a drugi wewnątrz, to przed usunięciem okręgu stanowiły one jeden i ten sam region, a więc teraz również są różnokolorowe.

O skuteczności metody indukcji przekonamy się jeszcze nie raz. Na zakończenie tego rozdziału jeszcze jeden problem o kolorowaniu.

Problem 30 *Na stole rozrzucono kolekcję n jednakowych monet tak, że żadne dwie z nich nie nachodzą na siebie. Chcemy pokolorować te monety w taki sposób, aby żadne dwie stykające się nie miały tego samego koloru. Ile kolorów w najgorszym wypadku potrzeba do wykonania tego zadania?*

4 Trzy podstawowe zasady

Na kilku prostych przykładach zilustrujemy trzy zasady o wielkim znaczeniu w Kombinatoryce.

4.1 Zasada szufladkowa

Zasda szufladkowa stwierdza, że jeżeli rozmieści się $n+1$ przedmiotów w n szufladkach, to co najmniej jedna szufladka będzie zawierać więcej niż jeden przedmiot. Pomimo oczywistości tego faktu przedstawimy poniżej jego dowód za pomocą metody indukcji.

Jeśli $n = 1$, to oczywiście oba przedmioty trafią do jedynej szufladki i stwierdzenie jest prawdziwe. Załóżmy, że zasada jest słuszna dla k szufladek i $k+1$ przedmiotów i rozważmy przypadek $k+1$ szufladek i $k+2$ przedmiotów. Istnieją trzy możliwości ze względu na liczbę przedmiotów w ostatniej szufladce: (1) żaden przedmiot tam nie trafił, (2) trafił do niej dokładnie jeden przedmiot, (3) zawiera ona więcej niż jeden przedmiot. W przypadkach (1) i (2) co najmniej $k+1$ przedmiotów musi być rozmieszczonych w pierwszych k szufladkach. Zatem, na mocy indukcji istnieje wśród nich szufladka zawierająca więcej niż jeden przedmiot. W przypadku (3) ostatnia szufladka spełnia żądany warunek.

A oto kilka niebanalnych przykładów zastosowania tej zasady.

Przykład 31 *Pewna grupa n osób wita się podając sobie ręce, przy czym nikt nie wita się sam ze sobą i żadna para osób nie wita się więcej niż* *jeden raz. Czy jest możliwe aby każda z tych osób ściskała inną liczbę dłoni?*

Na pozór mogłoby się wydawać, że jest to możliwe ponieważ liczba możliwych uścisków jednej osoby może przybierać dowolną spośród wartości od 0 do $n-1$, których jest przecież n. Jednak zauważmy, iż skrajne przypadki 0 i $n-1$ wykluczają się wzajemnie. W rzeczy samej, nie jest możliwe, aby któraś z osób nie uścisnęła żadnej dłoni i jednocześnie ktoś inny przywitał się z wszystkimi. Zatem, na mocy zasady szufladkowej muszą istnieć dwie osoby, które wymieniły tę samą liczbę uścisków.

Przykład 32 *Pokazać, że wśród dowolnych n liczb całkowitych istnieje podzbiór, którego suma elementów dzieli się przez n.*

Niech $a_1, a_2, ..., a_n$ będą dowolnymi liczbami naturalnymi. Rozważmy n zbiorów

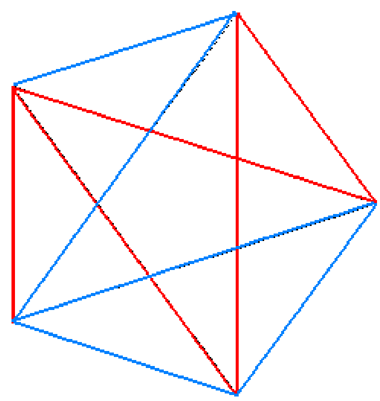
$$A_1 = \{a_1\},\ A_2 = \{a_1, a_2\}, ..., A_n = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$$

i n szufladek ponumerowanych liczbami $0, 1, ..., n-1$. Umieśćmy zbiór A_i w szufladce j jeśli reszta z dzielenia sumy $a_1 + a_2 + ... + a_i$ przez n wynosi j. Jeżeli szufladka 0 nie jest pusta to znajdujący się w niej zbiór ma sumę dzielącą się przez n. W przeciwnym razie, n zbiorów A_i jest rozmieszczonych w $n-1$ szufladkach, a zatem istnieją dwie liczby $r < s$ takie, że

$$a_1 + ... + a_r \equiv a_1 + ... + a_s (\mathrm{mod}\, n).$$

Wówczas różnica tych sum $a_{r+1} + ... + a_s$ musi dzielić się przez n.

Przykład 33 *Wykazać, że dla każdego k istnieje takie N, że przy dowolnym kolorowaniu boków i przekątnych N-kąta foremnego dwoma kolorami musi istnieć k wierzchołków takich, że wszystkie odcinki pomiędzy nimi są tego samego koloru.*



Pokażemy, że wystarczy $N = 2^{2k}$ wierzchołków. Przypuśćmy, że wierzchołki są jakoś ponumerowane liczbami $1, 2, ..., N$ i niech $w_1 = 1$ będzie pierwszym z nich. Na mocy zasady szufladkowej istnieje zbiór wierzchołków A_1 rozmiaru co najmniej 2^{2k-1} taki, że wszystkie odcinki o początku w w_1 i końcach w A_1 są tego samego koloru. Teraz nich w_2 będzie wierzchołkiem o najmniejszym numerze w A_1. Na mocy zasady szufladkowej istnieje zbiór $A_2 \subset A_1$ rozmiaru co najmniej 2^{2k-2} taki, że wszystkie odcinki łączące w_2 z punktami zbioru A_2 są tego samego koloru. Kontynuując ten proces otrzymamy ciąg wierzchołków $w_1, w_2, ..., w_{2k}$ i ciąg zbiorów $A_1 \supset ... \supset A_{2k}$ takie, że $w_i \in A_{i-1}$ i odcinki z w_i do A_i są tego samego koloru. Zatem kolor odcinka łączącego w_i z w_j zależy jedynie od $\min\{i, j\}$. Wobec tego, jeszcze raz dzięki zasadzie szufladkowej, istnieje podzbiór H zawarty w zbiorze $\{w_1, ..., w_{2k}\}$ rozmiaru co najmniej k taki, że wszystkie odcinki łączące punkty zbioru H są tego samego koloru.

Przykład 34 *Udowodnić, że z dowolnej permutacji liczb* $1, 2, ..., (r-1)(m-1)+1$ *można wybrać podciąg rosnący długości* r *lub podciąg malejący długości* m.

Na przykład, każda permutacja liczb od 1 do 7 będzie zawierać 4-wyrazowy podciąg rosnący lub 3-wyrazowy podciąg malejący:

$$\mathbf{5}, 1, 6, \mathbf{3}, \mathbf{2}, 7, 4$$

Niech $n = (r-1)(m-1)+1$ i niech $P = (a_1, a_2, ..., a_n)$ będzie permutacją liczb od 1 do n. Niech r_j oznacza długość najdłuższego *rosnącego* podciągu *kończącego* się w a_j, a m_j—długość najdłuższgo *malejącego* podciągu *zaczynającego* sie w a_j. W ten sposób każdy wyraz a_j otrzymuje parę wyników (r_j, m_j). Na przykład,

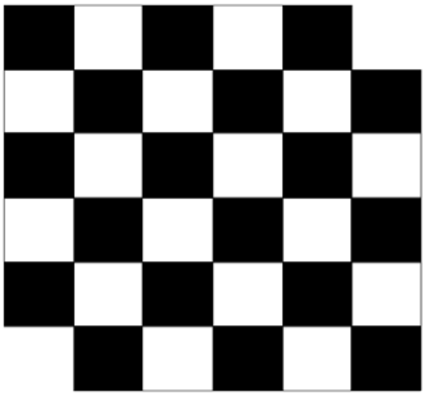
a_j	5	1	6	3	2	7	4
r_j	1	1	2	2	2	3	3
m_j	3	1	3	2	1	2	1

Łatwo zobaczyć, że w ogólnym przypadku żadne dwa wyrazy nie będą miały tej samej pary wyników. W istocie, jeżeli $j < k$, to albo $a_j < a_k$ i wtedy $r_j < r_k$ albo $a_j > a_k$ i wtedy $m_j > m_k$. Rozważmy teraz szachownicę $n \times n$, oraz jej prostokątną część o wymiarach $(r-1) \times (m-1)$ znajdującą się w lewym dolnym rogu. Dla każdego $j = 1, 2, ..., n$ postawmy pionek na polu o współrzędnych (r_j, m_j). Wobec powyższego, rozstawimy na szachownicy n pionków i żadne dwa z nich nie trafią na to samo pole. Ale $n > (r-1)(m-1)$, a więc przynajmniej jeden pionek znajdzie się poza prostokątem w lewym dolnym rogu. To oznacza, że istnieje takie j_0, że $r_{j_0} \geq r$ lub $m_{j_0} \geq m$, co mieliśmy właśnie udowodnić.

4.2 Zasada dwoistości

Przede wsystkim należy zaznaczyć, że ta zasada właściwie nie jest ściśle określona, a nawet trudno byłoby ją sformułować w potocznym języku. Z grubsza chodzi tu o wykluczanie pewnych sytuacji dzięki odwiecznej walce przeciwieństw, takich jak np. parzyste-nieparzyste, czarne-białe, itp. Zilustrujemy tę zasadę na kilku przykładach.

Przykład 35 *Czy można pokryć szachownicę $n \times n$ z usuniętymi dwoma przeciwległymi narożnikami nie nakładającymi się kostkami domina?*



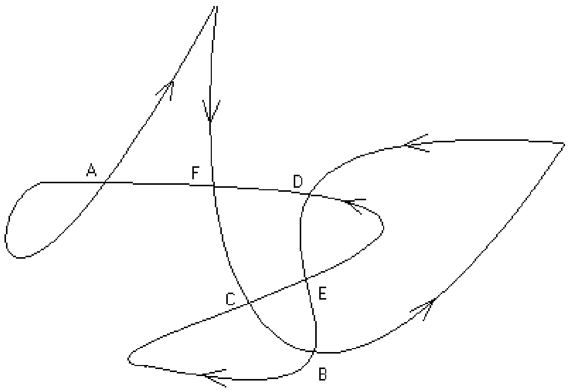
Jeżeli n jest nieparzyste, to odpowiedź jest oczywiście negatywna. Jeżeli n jest parzyste to sytuacja jest mniej oczywista, ale odpowiedź również brzmi—nie. W istocie, dwa usunięte pola musiały być tego samego koloru, albo oba czarne, albo oba białe. Zatem liczby białych i czarnych pól są różne. Z drugiej strony jedna kostka domina zakrywa dokładnie jedno czarne i jedno białe pole. Wobec tego, wszystkie kostki domina zakrywają tyle samo pól białych co czarnych. Ta sprzeczność dowodzi, że nie da się dokonać takiego pokrycia.

Przykład 36 *Czy można narysować "kopertę" nie odrywając ołówka od papieru i nie rysując dwa razy po tej samej linii?*

Rozważmy dowolną krzywą na płaszczyźnie narysowaną za pomocą ciągłej linii bez przechodzenia przez którykolwiek z jej odcinków więcej niż jeden raz. Rozważmy dowolny punkt krzywej różny od początkowego i końcowego. Jest jasne, że liczba "wejść" do tego punktu musi być równa liczbie "wyjść" z niego. Stąd łączna liczba odcinków krzywej spotykających się w dowolnym takim punkcie musi być parzysta. W kopercie mamy jednak 4 punkty "nieparzyste", co wyklucza możliwość jej *unikursalności.*

Problem 37 *Czy można narysować linię ciągłą, która przetnie każdy z odcinków poniższej figury dokładnie raz?*

Problem 38 (Kody Gaussa) *Rozważmy krzywą zamkniętą na płaszczyźnie o skończonej liczbie punktów samoprzecięcia, przy czym załóżmy, że krzywa przechodzi przez każdy z nich dokładnie dwa razy. Oznaczając te punkty symbolami A, B, C,... i obiegając krzywą w jednym z dwóch możliwych kierunków otrzymamy pewien ciąg (kod), w którym każdy symbol występuje dokladnie dwa razy. Pokazać, że liczba symboli pojawiających się dokładnie jeden raz pomiędzy dwoma wystąpieniami tego samego symbolu w kodzie Gaussa jest zawsze parzysta.*



Kod Gausa: $AFCBDEBCEDFA$

Przykład 39 (Lemat o uściskach dłoni) *W każdej chwili liczba osób we Wszechświecie, które w swym życiu uścisnęły nieparzystą liczbę dłoni jest parzysta.*

Ten na pierwszy rzut oka zadziwiający fakt ma proste wytłumaczenie. Wyobraźmy sobie, że jakaś *Istota* o nadprzyrodzonych zdolnościach wie dokładnie ile uścisków ma na swym koncie każda z żyjących kiedykolwiek osób. Suma wszystkich tych liczb jest podwojeniem globalnej liczby wszystkich uścisków, bowiem w każdym pojedynczym uścisku zawsze biorą udział dwie osoby. Jest więc parzysta. Z drugiej zaś strony jest jasne, że w każdej sumie liczb naturalnych, której wartość jest parzysta liczba składników nieparzystych musi być parzysta.

Problem 40 *Odbywa się przyjęcie u państwa Szaradków, w którym oprócz Pana Szaradka i Pani Szaradkowej biorą udział cztery inne pary. Ludzie wymieniają uściski dłoni między sobą, przy czym żadne dwie osoby nie robią tego dwa razy i nikt nie wita się ze swoim partnerem/partnerką. Zarówno Pan jak i Pani domu wymienili z kimś z gości co najmniej po jednym uścisku. Pod koniec przyjęcia Pan Szaradek zapytał każdego (wyłączając siebie) o liczbę dokonanych uścisków. W odpowiedzi każda z osób podała inną liczbę. Ile uścisków dokonała Pani Szaradkowa?*

4.3 Zasada włączania i wyłączania

Rozpocznijmy od prostego przykładu.

Przykład 41 *W pewnym klubie jest 10 osób grających w szachy i 15 grających w brydża. 6 spośród nich gra w obie te gry. Ile osób jest w tym klubie?*

Oznaczmy przez A zbiór szachistów, a przez B zbiór brydżystów. Pytamy więc o liczbę elementów sumy $A \cup B$. Jak nietrudno przekonać się, dla dowolnych zbiorów skończonych A i B zachodzi wzór

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| .$$

Wobec tego, liczba osób w klubie to $10 + 15 - 6 = 19$.

Nieco trudniej będzie rozwiązać podobny ale bardziej złożony problem.

Przykład 42 *W pewnym klubie jest 10 osób grających w szachy, 15 grających w brydża i 12 grających w pokera. Spośród nich 5 gra w szachy i brydża, 4 w brydża i pokera, 3 w szachy i pokera, a tylko 2 grają we wszystkie te gry. Ile osób jest w tym klubie?*

Potrzebujemy analogicznego wzoru na liczbę elementów sumy trzech zbiorów A, B, C. Analizując odpowiedni diagram możemy przekonać się, że

$$|A \cup B \cup C| = |A|+|B|+|C|-|A \cap B|-|B \cap C|-|A \cap C|+|A \cap B \cap C| .$$

Wobec tego poszukiwana liczba to

$$10 + 15 + 12 - 5 - 4 - 3 + 2 = 27$$

Zasada włączania i wyłączania obejmuje ogólny przypadek n zbiorów skończonych.

Twierdzenie 43 *Niech $A_1, A_2, ..., A_n$ będą zbiorami skończonymi i niech $I = \{1, 2, ..., n\}$. Wówczas*

$$|A_1 \cup ... \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\{i_1, i_2, ..., i_k\} \subseteq I} (-1)^{k-1} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k}| .$$

Dowód pominiemy, choć można go przeprowadzić przez indukcję.

Problem 44 *Napisano n listów i zaadresowano dla nich n kopert. Jeżeli listy wkładane są do kopert całkiem przypadkowo, to jakie jest prawdopodobieństwo, że żaden list nie znajdzie się we właściwej kopercie?*

Ponumerujmy listy i koperty liczbami $1, 2, ..., n$ tak aby numer listu zgadzał się z numerem koperty, do której powinien był on trafić. Każde z możliwych rozmieszczeń możemy traktować jak bijekcję (w istocie permutację) $f : X \to X$, gdzie $X = \{1, 2, ..., n\}$. Na przykład funkcja

j	1	2	3	4	5	6
$f(j)$	2	4	5	1	6	3

przedstawia jeden z możliwych "nieporządków", w którym żaden list nie znajduje się we właściwej kopercie. Znajdziemy teraz liczbę takich nieporządków stosując zasadę włączania i wyłączania. W tym celu oznaczmy przez A_i zbiór wszystkich permutacji f takich, że $f(i) = i$. Szukana przez nas liczba to oczywiście $n! - |A_1 \cup ... \cup A_n|$. Jeśli $\{i_1, ..., i_k\}$ jest dowolnym k-elementowym podzbiorem zbioru X, to

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k}| = (n-k)!$$

i stąd

$$|A_1 \cup ... \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\{i_1, i_2, ..., i_k\} \subseteq I} (-1)^{k-1} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k}|$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} (n-k)! = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{n!}{k!} = n! \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{1}{k!}$$

$$= n! \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + ... + \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \right).$$

Szukane prawdopodobieństwo wyraża się więc wzorem

$$\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - ... + \frac{(-1)^{n-1}}{n!}$$

i dąży do $1/e$ przy $n \to \infty$.

Przykład 45 *Niech $N = p_1^{r_1} p_2^{r_2} ... p_n^{r_n}$ będzie rozkładem kanonicznym liczby N. Wykazać, że*

$$\varphi(N) = N\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) ... \left(1 - \frac{1}{p_n}\right)$$

gdzie $\varphi(N)$ jest funkcją Eulera.

Zastosujemy zasadę włączania i wyłączania. Przypomnijmy, że $\varphi(N)$ oznacza liczbę liczb względnie pierwszych z N z przedziału $[1, N]$. Niech A_i będzie zbiorem tych liczb spośród $1, 2, ..., N$, które dzielą się przez p_i. Z definicji funkcji Eulera mamy

$$\varphi(N) = N - |A_1 \cup ... \cup A_n| .$$

Ponieważ

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k}| = \frac{N}{p_{i_1} p_{i_2} ... p_{i_k}},$$

więc z zasady włączania i wyłączania dostajemy

$$\varphi(N) = N - \sum_{k=1}^{n} \sum_{\{i_1, i_2, ..., i_k\} \subseteq I} (-1)^{k-1} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k}|$$

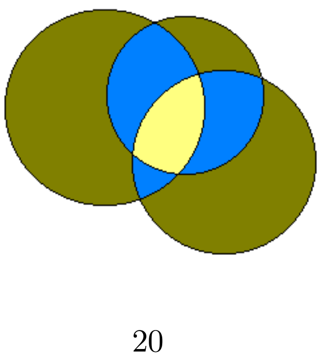
$$= N + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sum_{\{i_1, i_2, ..., i_k\} \subseteq I} \frac{N}{p_{i_1} p_{i_2} ... p_{i_k}}.$$

Otorzenie nawiasów po drugiej stronie wzoru daje dokładnie to samo wyrażenie.

Problem 46 *Danych jest n punktów na płaszczyźnie $P_1, P_2, ..., P_n$ i pewna kolekcja kół o środkach w tych punktach tworząca figurę F. Niech F' oznacza figurę utworzoną z tych samych kół, ale o środkach przesuniętych do punktów $P'_1, P'_2, ..., P'_n$ takich, że*

$$d(P'_i, P'_j) \leq d(P_i, P_j),$$

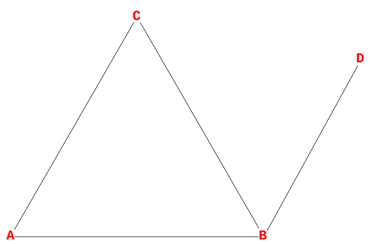
dla każdej pary liczb $1 \leq i, j \leq n$. Czy pole figury F' może być większe od pola figury F?



5 Grafy

Niech V będzie niepustym zbiorem i niech $\binom{V}{2}$ oznacza zbiór wszystkich 2-elementowych podzbiorów zbioru V. *Grafem* G na zbiorze V nazywamy parę $G = (V, E)$, gdzie $E \subseteq \binom{V}{2}$ jest dowolnym podzbiorem zbioru $\binom{V}{2}$. Elemnty zbioru V nazywamy *wierzchołkami* grafu G, a elementy zbioru E—*krawędziami* grafu G. Liczbę $|V|$ nazywamy *rzędem* grafu G. Krawędź $\{u, v\}$ jest również oznaczana przez uv.

Naturalną graficzną reprezentacją grafu jest rysunek, w którym wierzchołki grafu są punktami na płaszczyźnie, a krawędzie są odcinkami łączącymi odpowiednie wierzchołki. Na przykład, poniższy rysunek ilustruje graf $G = (V, E)$, w którym $V = \{a, b, c, d\}$ i $E = \{ab, ac, bc, bd\}$:



W wielu sytuacjach dla podkreślenia, że chodzi o zbiór wierzchołków czy krawędzi grafu G będziemy pisać $V(G)$ i $E(G)$ zamiast V i E.

5.1 Sąsiedztwo i incydencja

Jeżeli $e = uv$ jest krawędzią grafu G, to mówimy, że e *łączy* wierzchołki u i v, i że te wierzchołki *sąsiadują* ze sobą w grafie G. W tym przypadku mówimy także, że krawędź e jest *incydentna* z wierzchołkami u i v. Zbiór wszystkich sąsiadów wierzchołka v oznaczamy przez $N(v)$ i nazywamy jego *sąsiedztwem*. Na przykład, w powyższym grafie $N(A) = \{B, C\}$. Podobnie dwie krawędzie incydentne z tym samym wierzchołkiem nazywamy krawędziami *sąsiednimi*.

Dwa grafy G i H nazywamy *izomorficznymi* jeśli istnieje bijekcja ψ między zbiorami $V(G)$ i $V(H)$ zachowująca sąsiedztwo wierzchołków, tzn.

$$uv \in E(G) \Leftrightarrow \psi(u)\psi(v) \in E(H).$$

Fakt izomorfizmu grafów zapisujemy w postaci $G \simeq H$.

Liczbę krawędzi incydentnych z wierzchołkiem v w grafie G nazywamy *stopniem* wierzchołka v i oznaczamy przez $d(v)$. Maksymalny ze stopni wierzchołków w grafie G oznaczamy przez $\Delta(G)$. Jeśli wszystkie stopnie wierzchołków są równe k, to graf nazywamy *k-regularnym*.

Twierdzenie 47 (Lemat o uścisakch dłoni) *W dowolnym grafie $G = (V, E)$ zachodzi wzór*

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2\,|E|\,.$$

Dowód. W istocie, "każdy kij ma dwa końce", zatem sumując stopnie wszystkich wierzchołków każdą krawędź policzymy dwa razy. ■

5.2 Ścieżki i cykle

Ciąg krawędzi postaci

$$v_0v_1, v_1v_2, ..., v_{r-1}v_r$$

nazywamy *spacerem* długości r między wierzchołkami v_0 i v_r. Jeżeli żadna krawędź nie została powtórzona, to taki spacer nazywamy *szlakiem*. Jeśli ponadto, wszystkie wierzchołki na szlaku są różne to mamy doczynienia ze *ścieżką* w grafie G. Jeśli $v_0 = v_r$ to spacer lub szlak nazywamy *zamkniętym*, a jeśli dodatkowo wszystkie wierzchołki $v_0, v_1, ...v_{r-1}$ są różne, to taki szlak nazywamy *cyklem*.

Cykl długości 3 nazywamy *trójkątem*. Długość najkrótszego cyklu w grafie G nazywamy *obwodem* grafu G. Długość najkrótszej ścieżki łączącej dwa wierzchołki u i v oznaczamy przez $d(u, v)$ i nazywamy *odległością* międzu nimi. Maksymalną odległość między dwoma wierzchołkami w garfie G nazywamy *średnicą* grafu G.

Graf G nazywamy *spójnym* jeśli dla dowolnych dwóch wierzchołków $u, v \in V(G)$ istnieje w nim ścieżka łącząca u i v. W przeciwnym razie graf nazywamy *niespójnym*. Każdy niespójny graf G można rozbić na *składowe*, czyli maksymalne spójne podgrafy.

Problem 48 *Wykazać, że jeżeli istnieją w grafie G ścieżki łączące wierzchołki a z b i b z c, to istnieje również ścieżka łącząca wierzchołki a i c.*

Niech P oznacza ścieżkę pomiędzy a i b, a Q niech będzie ścieżką łączącą b z c. Jeśli ścieżki P i Q nie mają wspólnych wierzchołków, to nie ma żadnego problemu. W przeciwnym razie, niech d będzie pierwszym wierzchołkiem na ścieżce P, który należy również do Q. Niech P' oznacza fragment ścieżki P od a do d, a Q'' fragment ścieżki Q od d do c. Wówczas $P'Q''$ jest ścieżką, którą możemy przedostać się z a do c.

5.3 Operacje na grafach

Podgrafem grafu G nazywamy dowolny graf H taki, że $V(H) \subseteq V(G)$ i $E(H) \subseteq E(G)$. Jeżeli $V(H) = V(G)$ to H jest podgrafem *rozpinającym* garfu G. Podgrafem *indukowanym* garfu G nazywamy taki jego podgraf

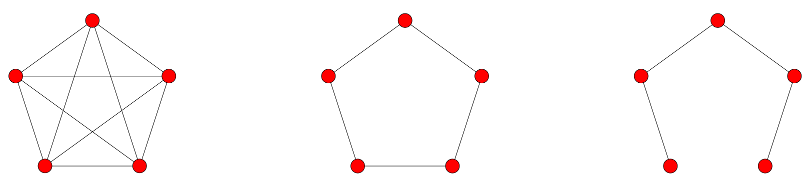
H, w którym zbiór $E(H)$ zawiera *wszystkie* krawędzie grafu G łączące wierzchołki zbioru $V(H)$.

Niech v będzie wierzchołkiem, a e krawędzią w grafie G. Na szczególną uwagę zasługują dwie konstrukcje podgrafów $G - e$ i $G - v$, z których pierwszy powstaje przez usunięcie krawędzi e ze zbioru $E(G)$, natomiast drugi powstaje przez usunięcie wierzchołka v wraz ze wszystkimi krawędziami incydentnymi z v w grafie G.

Jeśli $e = ab$ jest krawędzią w grafie G, to możemy otrzymać nowy graf przez zastąpienie e dwoma nowymi krawędziami ax i xb, gdzie x jest nowym wierzchołkiem. Ta operacja nazywa się podziałem krawędzi. Dwa grafy, które mogą być otrzymane z tego samego grafu przez podziały jego krawędzi nazywamy *homeomorficznymi*.

5.4 Przykłady grafów

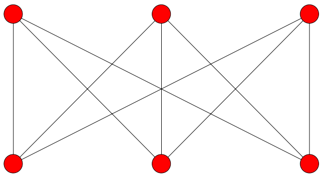
Graf, w którym każde dwa wierzchołki są połączone krawędzią nazywamy grafem *pełnym*. Graf pełny na n wierzchołkach oznaczamy przez K_n. Oczywiście liczba krawędzi tego grafu wynosi $\binom{n}{2}$. *Cyklem* C_n nazywamy graf składający się z wierzchołków i boków n-kąta, a *ścieżką* P_n jest graf $C_n - e$.



K_5 C_5 P_5

Kliką w grafie G nazywamy podgraf izomorficzny z grafem pełnym. *Liczbą klikową* grafu G, oznaczaną przez $\omega(G)$, nazywamy rząd maksymalnej kliki w grafie G.

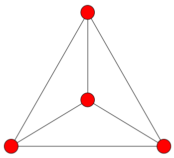
Grafem dwudzielnym nazywamy graf, którego zbiór wierzchołków można podzielić na dwa podzbiory w taki sposób, że każda krawędź łączy wierzchołek z pierwszego podzbioru z wierzchołkiem drugiego podzbioru. *Grafem pełnym dwudzielnym* nazywamy graf dwudzielny, w którym każdy wierzchołek z pierwszego podzbioru jest połączony z wszystkimi wierzchołkami w drugim podzbiorze. Graf pełny dwudzielny na zbiorach wierzchołków o liczbie elementów m i n oznaczamy przez $K_{m,n}$.



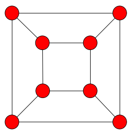
$K_{3,3}$

Poznamy jeszcze wiele interesujących grafów. Oto kilka szczególnie eleganckich przykładów.

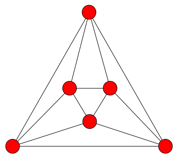
Grafy Platońskie:



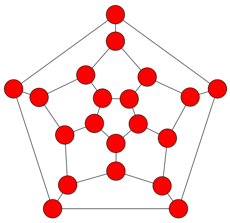
tetrahedron



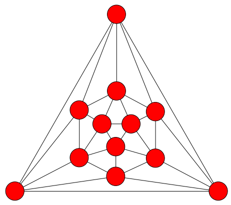
cube



octahedron

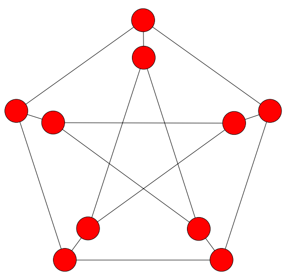


dodecahedron



icosahedron

Graf Petersena:



5.5 Grafy planarne

Mówimy, że graf G jest *planarny*, jeżeli może być narysowany na płaszczyźnie tak, że dowolne dwie jego krawędzie nie przecinają się w żadnym punkcie (poza ewentualnym wspólnym wierzchołkiem oczywiście). Taki rysunek grafu będziemy nazywać jego *planarną reprezentacją*. Na przykład graf pełny K_4 jest planarny o czym świadczy chociażby rysunek pierwszego grafu Platońskiego. Jak się wkrótce przekonamy już graf K_5 planarny nie jest. Pojawia się więc naturalne pytanie: jak rozpoznać czy dany graf jest planarny czy nie? Częściowej odpowiedzi na to pytanie dostarcza wzór Eulera, który poznaliśmy w Problemie 28. Nim sformułujemy ten wzór jeszcze raz dla grafów planarnych odnotujemy pewien nietrywialny geometryczny fakt dotyczący planarnych reprezentacji.

Twierdzenie 49 (Fáryego-Wagnera) *Dowolny graf planarny posiada reprezentację na płaszczyźnie, w której każda krawędź jest odcinkiem lini prostej.*

Mając daną planarną reperezentację grafu możemy rozpatrywać zbiór punktów nie należących do tej reprezentacji. Zbiór ten rozpada się na rozłączne *regiony*, zwane również *ścianami*, podobnie jak to miało miejsce dla wielościanów sferycznych. Okazuje się, że wzór z Problemu 28 jest słuszny dla dowolnego spójnego grafu planarnego.

Twierdzenie 50 (Wzór Eulera) *Niech $G = (V, E)$ będzie spójnym grafem planarnym. Wówczas liczba regionów w dowolnej reprezentacji garfu G na płaszczyźnie wynosi $|E| - |V| + 2$.*

Dowód. Tym razem dowód przeprowadzimy za pomocą indukcji względem liczby cykli w grafie G. Niech F oznacza zbiór regionów w planarnej reprezentacji G. Jeżeli G nie zawiera żadnego cyklu, to znaczy, że jest drzewem i wówczas $|F| = 1$. Z drugiej strony w dowolnym drzewie liczba wierzchołków jest o 1 większa od liczby krawędzi, a więc w tym przypadku wzór jest prawdziwy. Załóżmy więc, że graf G ma co najmniej jeden cykl i że wzór jest prawdziwy dla grafów o mniejszej liczbie cykli. Niech $e \in E$ będzie krawędzią jednego z tych cykli i rozważmy graf $G' = (V, E \setminus \{e\})$. Oczywiście G' nadal jest spójny i ma mniej cykli niż G, zatem możemy zastosować do niego założenie indukcyjne, stwierdzając, że liczba regionów w jego reprezentacji wynosi

$$|E \setminus \{e\}| - |V| + 2 = |E| - |V| + 1.$$

Z drugiej strony jest jasne, że usunięcie krawędzi e zmniejszyło liczbę regionów o 1, co oznacza, że

$$|F| = (|E| - |V| + 1) + 1 = |E| - |V| + 2.$$

To kończy dowód. ■

Oto kilka ważnych wniosków wynikających ze Wzoru Eulera.

Wniosek 51 *Nich $G = (V, E)$ będzie dowolnym grafem planarnym. Wówczas*

$$|E| \leq 3|V| - 6.$$

Dowód. Załóżmy, dla ułatwienia argumentacji, że graf G jest spójny i nie zawiera wierzchołków stopnia 1. Niech $F = \{F_1, ..., F_r\}$ będzie zbiorem wszystkich regionów pewnej reprezentacji G. Niech E_i oznacza liczbę krawędzi regionu F_i. Ponieważ każdy krawędź rozgranicza dwa regiony więc zliczając krawędzie w kolejnych regionach otrzymamy

$$E_1 + E_2 + ... + E_r = 2|E|.$$

Z dugiej strony każdy region jest ograniczony przez co najmniej 3 krawędzie, a więc $|E_i| \geq 3$ i stąd

$$3|F| \leq 2|E|.$$

Ta ostatnia nierówność po zastosowaniu Wzoru Eulera daje w efekcie

$$3(|E| - |V| + 2) \leq 2|E|$$

i ostatecznie

$$|E| \leq 3|V| - 6,$$

co miało być udowodnione. ■

Przykład 52 *Wykazać, że graf K_5 nie jest planarny.*

Dla grafu K_5 mamy $|V| = 5$ i $|E| = 10$. Ale $10 > 3 \cdot 5 - 6$ co przesądza sprawę na mocy ostatniego wniosku.

Wniosek 53 *Jeżeli G jest grafem planarnym dwudzielnym, to*

$$|E| \leq 2|V| - 4$$

Dowód. Przy oznaczeniach z poprzedniego dowodu zauważmy, że tym razem $|E_i| \geq 4$ ponieważ w grafie dwudzielnym nie ma cykli nieparzystych. Stąd

$$4|F| \leq 2|E|$$

i na mocy Wzoru Eulera otrzymujemy

$$4(|E| - |V| + 2) \leq 2|E|$$

i

$$|E| \leq 2|V| - 4.$$

■

Przykład 54 *Pokazać, że graf $K_{3,3}$ nie jest planarny.*

Podobnie wystarczy sprawdzić, że nie zachodzi dla niego ostatnia nierówność. W istocie, mamy bowiem $|V| = 6$ i $|E| = 9$.

Wniosek 55 *Nich $G = (V, E)$ będzie grafem planarnym o obwodzie r. Wówczas*

$$(r-2)\,|E| \leq r\,(|V| - 2)\,.$$

Dowód. Dowód przebiega tak samo jak dwa poprzednie, przy czym teraz mamy $|E_i| \geq r$. ■

Przykład 56 *Pokazać, że graf Petersena nie jest planarny.*

Wystarczy zauważyć, że obwód grafu Petersena wynosi 5 i zastosować ostatni wniosek.

Wiemy już, że grafy K_5 i $K_{3,3}$ nie są planarne. Jak się okazuje są to, w pewnym sensie, jedyne takie grafy. Rozważmy rodzinę wszystkich grafów, z których każdy jest homeomorficzny z K_5 lub $K_{3,3}$. Nazwijmy je *K-grafami.* Oczywiście żaden K-graf, ani żaden graf zawierający jakiś K-graf jako podgraf, nie może być planarny.

Twierdzenie 57 (Kuratowskiego) *Graf jest planarny wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera jako podgrafu żadnego K-grafu.*

Pokażemy teraz, że wierzchołki każdego grafu planarnego mogą być pomalowane 6 kolorami tak aby dowolne dwa sąsiednie wierzchołki były różnokolorowe. Formalnie rzecz biorąc przez *kolorowanie* wierzchołków grafu rozumiemy funkcję $f : V \to C$, gdzie C jest dowolnym zbiorem, którego elementy umownie nazywamy "kolorami". Jeżeli $|C| = k$, to f nazywamy *k-kolorowniem.* Kolorowanie f wierzchołków grafu G nazywamy *właściwym* jeśli dla dowolnej krawędzi $e = uv \in E(G)$ spełniony jest warunek $f(u) \neq f(v)$. Najmniejszą liczbę k taką, że istnieje właściwe k-kolorowanie wierzchołków grafu G nazywamy *liczbą chromatyczną* grafu G i oznaczamy przez $\chi(G)$.

Problem 58 *Pokazać, że liczba chromatyczna dowolnego grafu planarnego nie przekracza* 6.

Wystarczy zauważyć, że w dowolnym grafie planarnym musi istnieć wierzchołek stopnia co najwyżej 5 i zastosować indukcję względem liczby wierzchołków grafu. W istocie, gdyby dla każdego wierzchołka $v \in V(G)$ było $d(v) \geq 6$, to wówczas na mocy lematu o uściskach dłoni mielibyśmy

$$2\,|E| = \sum_{v \in V(G)} d(v) \geq 6\,|V|$$

co jest sprzeczne z Wnioskiem 51.

Nieco trudniej udowodnić, że w istocie, do właściwego pomalowania grafu planarnego wystarczy 5 kolorów.

Twierdzenie 59 $\chi(G) \leq 5$ *dla każdego grafu planarnego* G.

Dowód. Zastosujemy indukcję względem liczby wierzchołków. Sprawdzenie początkowe nie przedstawia żadnej trudności. Załóżmy więc, że G jest grafem planarym i że twierdzenie zachodzi dla wszytkich grafów planarnych o mniejszej liczbie wierzchołków. Niech $v \in V(G)$ będzie wierzchołkiem stopnia co najwyżej 5 w grafie G i niech $G' = G - v$. Graf G' można pomalować 5 kolorami zgodnie z założeniem indukcyjnym. Jeżeli wśród sąsiadów wierzchołka v występują co najwyżej 4 różne kolory, to istnieje "wolny" kolor, którym można pomalować wierzcholek v. Jedyna kłopotliwa sytuacja jest wtedy gdy $d(v) = 5$ i każdy z pięciu sąsiadów v jest w innym kolorze. Oznaczmy wierzchołki sąsiadujące z v w porządku cyklicznym $v_1, v_2, ..., v_5$ i niech v_j będzie pomalowany kolorem j. Niech G_{ij} oznacza podgraf grafu G' indukowany przez wszystkie wierzchołki w kolorach ij. Jeżeli wierzchołki v_1 i v_3 nie należą do jednej składowej w grafie G_{13}, to możemy zamienić kolory 1 na 3 i na odwrót w składowej zawierającej powiedzmy v_1 i pomalować wierzcholek v kolorem 1. Podobnie w przypadku grafu G_{24}. Pozostaje wobec tego do rozważenia jedynie sytuacja, gdy zarówno v_1 i v_3 jak i v_2 i v_4 są w tych samych składowych w grafach G_{13} i G_{24}, odpowiednio. Ta sytuacja jest jednak z uwagi na planarność grafu G niemożliwa ponieważ musiałby wówczas istnieć wierzchołek należący do obu podgrafów G_{13} i G_{24}, co jest ewidentnie niemożliwe. ■

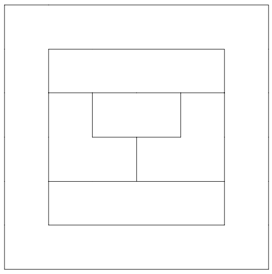
A jeszcze trudniej wykazać, że dla każdego grafu planarnego wystarczą 4 kolory... Najnowszy dowód można znaleźć w pracy: N. Robertson, D. Sanders, P. Seymour, R. Thomas, The four-colour theorem. J. Combin. Theory Ser. B 70 (1997), no. 1, 2–44.

Zakończymy to krótkie wprowadzenie do grafów planarnych kilkoma atrakcyjnymi problemami.

Problem 60 (Gra "Sprouts") *Danych jest* n *punktów na płaszczyźnie. W jednym ruchu gracz łączy linią dwa punkty (albo rysuje pętlę) i zaznacza kolejny punkt na dorysowanej linii, przestrzegając przy tym zasady aby stopień żadnego wierzchołka nie przekraczał* 3. *Wykazać, że gra musi się skończyć po co najwyżej* $3n$ *posunięciach. Który z graczy, I czy II, ma w tej grze strategię wygrywającą?*

Problem 61 (O dwóch takich co kolorowali mapę) *Dwóch graczy Jacek i Placek koloruje na zmianę regiony dowolnej mapy planarnej* k *kolorami.*

Obu graczy obowiązuje reguła właściwego kolorowania, jednak ich cele są różne. Jacek dąży do szczęśliwego pokolorowania całej mapy, zaś Placek stara się tak złośliwie kolorować, aby w efekcie cel ten nie był możliwy do osiągnięcia. Jaka jest najmniejsza liczba kolorów, przy której rozpoczynający kolorowanie Jacek ma strategię wygrywającą? Poniższy rysunek przedstawia mapę, na której, przy ograniczeniu do 4 kolorów, wygrywa Placek.



Problem 62 (Niepowtarzalne kolorowanie mapy) *Dowolny ciąg postaci*

$$(a_1, a_2, ..., a_n, a_1, a_2, ..., a_n)$$

nazywamy powtórzeniem. *Kolorowanie wierzchołków grafu G jest* niepowtarzalne *jeśli ciąg kolorów wzdłuż dowolnej ścieżki w G nie przypomina powtórzenia. Czy istnieje skończona liczba N, taka że każdy graf planarny ma niepowtarzalne N-kolorowanie?*

5.6 Grafy dwudzielne

Podzbiór $X \subseteq V(G)$ zbioru wierzchołków grafu G nazywamy *niezależnym* jeśli żadne dwa wierzchołki z A nie są połączone krawędzią w grafie G. Niech $G = (V, E)$ będzie dowolnym grafem dwudzielnym i niech $V = X \cup Y$ będzie podziałem zbioru wierzchołków G na zbiory niezależne. Nietrudno zauważyć, że wówczas

$$\sum_{x \in X} d(x) = \sum_{y \in Y} d(y) = |E| .$$

Obserwacja ta przyda nam się w rozwiązaniu następującego "małżeńskiego" problemu.

Problem 63 *W pewnej grupie dziewcząt i chłopców każda dziewczyna zna dokładnie k chłopców i każdy chłopiec zna dokładnie k dziewcząt. Czy zawsze jest możliwe skojarzenie par małżeńskich tak, aby każda z dziewcząt wyszła za mąż za chłopca którego zna?*

Przede wszystkim należy upewnić się, że liczba dziewcząt i chłopców jest taka sama. Niech X oznacza zbiór dziewcząt, a Y zbiór chłopców i niech $G = (X \cup Y, E)$ będzie grafem dwudzielnym ilustrującym znajomości, tzn. xy jest krawędzią w G wtedy, gdy dziewczyna x i chłopiec y znają się. Wówczas na mocy ostatniego wzoru mamy

$$k\,|X| = k\,|Y| = |E|\,,$$

a stąd $|X| = |Y|$.

Zauważmy ponadto, że jeśli skojarzenie par małżeńskich ma się udać, to dla każdego podzbioru dziewcząt $D \subseteq X$ musi istnieć co najmniej $|D|$ chłopców, których one znają, co nie jest oczywiste *a priori*. Pokażemy jednak, że nasze założenie pociąga za sobą także i ten warunek. W tym celu oznaczmy przez $J(D)$ zbiór chłopców znających co najmniej jedną dziewczynę ze zbioru D:

$$J(D) = \{y \in Y : xy \in E \text{ dla pewnego } x \in D\}.$$

Niech E_D oznacza zbiór wszystkich krawędzi posiadających wierzchołek w zbiorze D. Oczywiście mamy

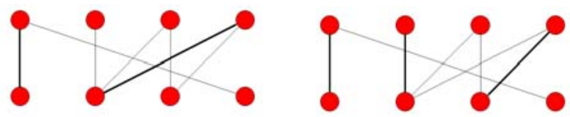
$$|E_D| = k\,|D|\,.$$

Z drugiej strony każda krawędź z E_D ma drugi koniec w zbiorze $J(D)$, a więc

$$|E_D| \leq k\,|J(D)|\,.$$

Stąd $|D| \leq |J(D)|$.

Czy ten oczywisty warunek konieczny wystarcza już do stwierdzenia możliwości skojarzenia małżeństw? Pokażemy, że odpowiedź na to pytanie jest pozytywna, co da rozwiązanie naszego problemu w znacznie ogólniejszej wersji. Przyjmijmy najpierw następującą definicję. *Skojarzeniem* w grafie dwudzielnym nazywamy podzbiór M zbioru krawędzi, z których żadne dwie nie mają wspólnego wierzchołka. Na rysunku poniżej widać dwa różne skojarzenia M_1 i M_2 w tym samym grafie G.


M_1 M_2

Skojarzenie M nazywamy *doskonałym* jeśli każdy wierzchołek grafu G należy do pewnej krawędzi skojarzenia M.

Twierdzenie 64 (Halla) *Graf dwudzielny $G = (X \cup Y, E)$ posiada skojarzenie doskonałe wtedy i tylko wtedy, gdy $|X| = |Y|$ i*

$$|J(D)| \geq |D|$$

dla każdego $D \subseteq X$.

Dowód. Konieczność powyższej nierówności jest oczywista. Przypuśćmy więc, że warunek ten jest spełniony. Pokażemy w jaki sposób dla dowolnego skojarzenia M takiego, że $|M| < |X|$ skonstruować skojarzenie M' spełniejące $|M'| = |M| + 1$.

Niech x_0 będzie dowolnym wierzchołkiem nie występującym w żadnej krawędzi M. Ponieważ $|J(x_0)| \geq |\{x_0\}| = 1$ więc istnieje co najmniej jedna krawędź x_0y_1 w G. Jeśli y_1 nie jest skojarzony w M, to możemy ją dołączyć do M i otrzymać powiększone skojarzenia M'. Jeśli jednak y_1 jest pokryty przez M, powiedzmy, że $x_1y_1 \in M$, to wówczas

$$|J(x_0, x_1)| \geq |\{x_0, x_1\}| = 2$$

a więc istnieje kolejny wierzchołek y_2 różny od y_1 sąsiadujący z x_0 lub x_1. Jeśli y_2 nie jest skojarzony, to zatrzymajmy się. W przeciwnym razie, jeśli $x_2y_2 \in M$, to istnieje wierzchołek y_3 sąsiadujący z x_0, x_1 lub x_2. Kontynuując w ten sposób musimy w końcu natrafić na nieskojarzony wierzchołek y_r ponieważ graf G jest skończony.

Każdy z wierzchołków y_i jest sąsiadem któregoś spośród wierzchołków $x_0, x_1, ..., x_{i-1}$, zatem odwracając nasze postępowanie dostaniemy ścieżkę

$$P = y_r x_s y_s x_t y_t ... y_u x_0,$$

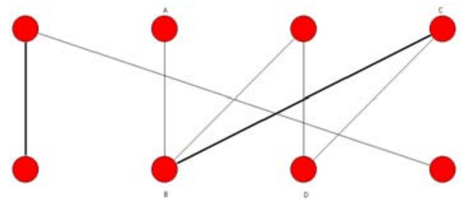
w której krawędzie na przemian należą i nie należą do M. Nowe skojarzenie M' otrzmujemy usuwając z M krawędzie x_iy_i dodając jednocześnie pozostałe krawędzie z P. Ponieważ obie końcowe krawędzie y_rx_s i y_wx_0 znajdą się w M' będziemy mieli $|M'| = |M| + 1$. ∎

Zauważmy, że z powyższego dowodu wynika praktyczna metoda znajdowania doskonałego skojarzenia w grafie dwudzielnym, o ile ono istnieje. Wykorzystuje ona pojęcie ścieżki naprzemiennej względem danego skojarzenia M. Mówimy, że ścieżka

$$P = x_0 y_1 x_1 y_2 ... x_{k-1} y_k$$

jest *naprzemienna* względem skojarzenia M jeśli krawędzie y_ix_i są w M, krawędzie $x_{i-1}y_i$ nie należą do M i wierzchołki końcowe x_0 i y_k nie należą do żadnej krawędzi M. Dowód Twierdzenia Halla pokazuje, że, przy odpowiednim założeniu o grafie G, jeśli M jest niepełnym skojarzeniem w G, to istnieje ścieżka naprzemienna względem M. Wówczas wymieniając odpowiednio krawędzie tej ścieżki dostajemy nowe skojarzenie M' z jedną krawędzią więcej.

Przykład 65 *Rozważmy graf G i skojarzenie M pokazane na rysunku poniżej.*



Ścieżkę naprzemienną tworzą wierzchołki $ABCD$. Mamy więc

$$M' = M \setminus \{BC\} \cup \{AB, CD\}.$$

Twierdzenie Halla ma wiele równoważnych sformułowań. Podamy teraz jedno z nich wykorzystujące tzw. transwersale (lub systemy różnych reprezentantów). Niech $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ będzie rodziną zbiorów skończonych. Zbiór $T = \{t_1, t_2, ..., t_n\}$ nazywamy *transwersalą* rodziny $\mathcal{F}$ jeśli $t_i \in A_i$ dla każdego i, oraz elementy t_i są parami różne.

Przykład 66 *Rozważmy, rodzinę zbiorów $A_1 = \{a, c\}$, $A_2 = \{b, c\}$, $A_3 = \{a, c, d, e\}$, $A_4 = \{b, d, f, g\}$, $A_5 = \{a, e\}$, $A_6 = \{a, b\}$. Czy ta rodzina ma transwesalę? Okazuje się, że odpowiedź może być znaleziona przy pomocy Twierdzenia Halla. Rozważmy graf dwudzielny $G = (X \cup Y, E)$, w którym $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $Y = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ i $ky \in E$ jeśli $y \in A_k$. Widzimy, że istnienie transwersali jest równoznaczne z istnieniem doskonałego skojarzenia, które w tym wypadku będzie pokrywać wszystkie wierzchołki zbioru X. Do praktycznego znalezienia transwersali można więc wykorzystać metodę ścieżek naprzemiennych.*

Wobec tego Twierdzenie Halla może być sformułowane równoważnie jak następuje.

Twierdzenie 67 *Rodzina zbiorów skończonych $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ posiada transwersalę wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego podzbioru $D \subseteq \{1, 2, ..., n\}$*

$$\left| \bigcup_{i \in D} A_i \right| \geq |D| \,.$$

Istnieją wszakże niebanalne problemy na pograniczu arytmetyki i teorii grafów. Oto jeden z nich dotyczący skojarzeń w pewnych grafach dwudzielnych.

Problem 68 (Newman) *Niech r będzie dowolną liczbą naturalną i niech $G = (X \cup Y, E)$ będzie grafem dwudzielnym, w którym $X = \{1, 2, ..., n\}$, $Y = \{r + 1, r + 2, ..., r + n\}$ i*

$$xy \in E \Leftrightarrow (x, y) = 1.$$

Czy dla każdego r graf G posiada skojarzenie doskonałe?

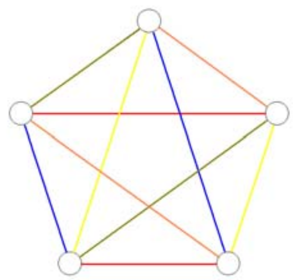
5.7 Kolorowanie krawędzi grafów

Kolorowanie krawędzi grafu G nazywamy *właściwym* jeżeli żadne dwie sąsiednie krawędzie nie są tego samego koloru. W takim kolorowaniu zbiór jednokolorowych krawędzi jest oczywiście skojarzeniem. Najmniejszą liczbę kolorów potrzebną do właściwego pokolorowania krawędzi grafu G nazywamy *indeksem chromatycznym* grafu G i oznaczamy przez $\chi'(G)$. Oczywiste jest, że

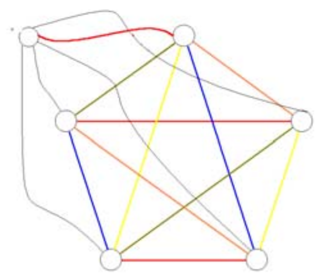
$$\chi'(G) \geq \Delta(G).$$

Problem 69 *Wyznaczyć $\chi'(K_n)$ dla każdego $n \geq 3$.*

Oczywiście dla $n = 3$ mamy $\chi'(K_3) = 3$. Łatwo również zauważyć, że $\chi'(K_4) = 3$. To nasuwa przypuszczenie, że indeks chromatyczny grafu pełnego K_n zależy od parzystości liczby n. Zajmiemy się najpierw przypadkiem nieparzystym. Niech więc $n = 2k+1$. Wpierw zauważmy, że $2k$ kolorów nie wystarczy. W istocie, krawędzi jednego koloru może być co najwyżej k, a wszystkich krawędzi jest $(2k + 1)k > 2k^2$. Pokolorowanie właściwe przy użyciu $2k + 1$ kolorów jest łatwe: wystarczy narysować K_n jako n-kąt foremny i pomalować jednym kolorem odcinki równoległe. Poniższy rysunek przedstawia takie kolorowanie dla $n = 5$.



W przypadku parzystym $n = 2k$ rozważmy graf $K_{n-1} = K_n - v$. Pomalujmy jego krawędzie $n - 1$ kolorami tak jak poprzednio. Zauważmy, że przy każdym wierzchołku brakuje jednego koloru, co pozwala na odpowiednie pomalowanie krawędzi incydentnych z usuniętym wierzchołkiem v (rysunek poniżej). Zatem $\chi'(K_{2k}) = 2k - 1$.



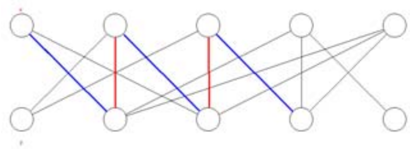
W rzeczywistości prawdziwe jest ogólne twierdzenie, że indeks chromatyczny dowolnego grafu G nie przekracza $\Delta(G) + 1$. Rozstrzygnięcie czy $\chi'(G) = \Delta$ czy $\Delta + 1$ bywa jednak w wielu wypadkach dość trudne.

Twierdzenie 70 *Indeks chromatyczny dowolnego grafu dwudzielnego G wynosi $\Delta(G)$.*

Dowód. Zastosujemy indukcję względem $m = |E|$. Jeśli $m = 1$, to twierdzenie jest oczywiste. Niech G będzie grafem dwudzielnym o $m \geq 2$ krawędziach i maksymalnym stopniu równym Δ. Przypuśćmy, że rezultat jest prawdziwy dla grafów dwudzielnych o mniejszej niż m liczbie krawędzi. Niech $e = xy$ będzie krawędzią grafu G i rozważmy graf $G' = G - e$. Ponieważ $\Delta(G') \leq \Delta$ więc istnieje właściwe kolorowanie grafu G' przy użyciu co najwyżej Δ kolorów. Ponieważ $d(x) < \Delta$, więc istnieje kolor, powiedzmy C, który nie występują na krawędziach incydentnych z x. Podobnie, istnieje kolor N, którego nie ma przy wierzchołku y. Jeżeli $C = N$, to sytuacja jest *prosta*, możemy bowiem pomalować krawędź xy właśnie tym kolorem. Załóżmy więc, że $C \neq N$. Pokażemy, że możliwe jest zmodyfikowanie pokolorowania grafu G' tak, aby znalazł się kolor, który nie występuje zarówno przy x jak i y. W tym celu zdefiniujmy ścieżkę

$$xy_1x_1y_2x_2...$$

maksymalnej długości tak, aby kolory N i C układały się na niej na przemian $NCNC...$, jak na rysunku.



Oczywiście ścieżka ta musi być skończona i na pewno nie może kończyć się w y. Możemy więc zamienić na niej kolory nie psując pokolorowania całego grafu. W efekcie kolor N nie będzie już występował przy wierzchołku x i będziemy mogli pomalować nim krawędź xy. To kończy dowód. ■

Problem 71 *Niech G będzie dowolnym grafem i przypuśćmy, że każdej krawędzi e grafu G przypisano dowolny zbiór kolorów L_e taki, że $|L_e| = \chi'(G)$. Czy jest możliwe właściwe pokolorowanie krawędzi grafu G, w którym kolor każdej krawędzi e jest elementem zbioru L_e?*

6 Kwadraty łacińskie

Niech $1 \leq m \leq n$ będą liczbami naturalnymi. *Prostokątem łacińskim* wymiaru $m \times n$ nazywamy macierz $P = (p_{ij})$ spełniającą następujące warunki:

1. $p_{ij} \in \{1, 2, ..., n\}$,
2. żaden wiersz nie zawiera dwóch takich samych elementów,
3. żadna kolumna nie zawiera dwóch takich samych elementów.

Na przykład,

$$P = \begin{bmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 2\,3\,5\,1\,4 \\ 5\,4\,2\,3\,1 \end{bmatrix}$$

jest prostokątem łacińskim wymiaru 3×5. Jeżeli $m = n$, to prostokąt łaciński nazywamy *kwadratem łacińskim.*

6.1 Rozszerzanie prostokątów łacińskich

Istnieje ścisły związek między prostokątami łacińskimi a kolorowaniem krawędzi w grafie dwudzielnym pełnym $K_{m,n}$. W istocie, jeżeli przyjmiemy $X = \{x_1, ..., x_m\}$ i $Y = \{y_1, ..., y_n\}$, to prostokąt łaciński $m \times n$ określa właściwe kolorowanie krawędzi $K_{m,n}$ poprzez wzór

$$f(x_i y_j) = p_{ij}.$$

Na odwrót, właściwe kolorowanie krawędzi grafu $K_{m,n}$ prowadzi w ten sam sposób do prostokąta łacińskiego.

Twierdzenie 72 *Dowolny prostokąt łaciński P wymiaru $m \times n$ może być rozszerzony do kwadratu łacińskiego $n \times n$.*

Dowód. Niech A_j będzie zbiorem tych elementów, które nie występują w kolumnie j. Pokażemy, że rodzina zbiorów A_j posiada transwersalę, co pozwoli na utworzenie kolejnego wiersza w prostokącie P. Dla większej obrazowości rozważmy graf dwudzielny, w którym $X = \{A_1, ..., A_n\}$, $Y = \{1, ..., n\}$ i $A_j k \in E$ wtedy i tylko wtedy, gdy $k \in A_j$. Łatwo zauważyć, że stopień każdego wierzchołka w tym grafie jest równy $n - m$, a więc sytuacja sprowadza się do rozważanej w Problemie 63. Ten zabieg można powtarzać doputy dopuki $n - m = 0$, czyli aż dostaniemy pełny kwadrat. ■

Na przykład, dla prostokąta P danego powyżej mamy

$$A_1 = \{3, 4\}, A_2 = \{1, 5\}, A_3 = \{1, 4\}, A_4 = \{2, 5\}, A_5 = \{2, 3\},$$

a jedną z możliwych transwersali stanowi zbiór

$$T = \{3, 1, 4, 5, 2\}.$$

Problem 73 (Tabliczka mnożenia) *Rozważmy macierz kwadratową $M = (m_{ij})$ wymiaru n zdefiniowaną wzorem*

$$m_{ij} = \begin{cases} i \cdot j \text{ jeśli } i \cdot j \leq n \\ \ast \text{ jeśli } i \cdot j > n \end{cases}.$$

Czy dla każdego n można w miejsce $\ast$ w tej macierzy wpisać liczby tak, aby powstał kwadrat łaciński?

6.2 Problem oficerów

Następujący oryginalny problem dotyczący kwadratów łacińskich pochodzi od Leonarda Eulera.

Problem 74 *Kolumna żołnierzy składa się z 36 oficerów z 6 różnych regimentów i w 6 różnych rangach (każdy regiment jest reprezentowany przez 6 oficerów w różnych rangach). Czy można ich ustawić w kwadrat tak, aby żadna ranga i żaden regiment nie zostały powtórzone w tym samym wierszu ani w tej samej kolumnie?*

Powyższy problem można skormułować równoważnie w języku kwadratów łacińskich. Dwa kwadraty łacińskie K i L rzędu n nazywamy *ortogonalnymi*, jeżeli wszystkie pary (k_{ij}, l_{ij}) są różne. Problem oficerów polega więc na znalezieniu dwóch ortogonalnych kwadratów łacińskich rzędu 6. Okazuje się jednak, że jest to niemożliwe.

Z drugiej strony gdyby zamienić w problemie 6 na 5, to istnieje i to nie jedno rozwiązanie! Jak można się przekonać, każde dwa z czterech poniższych kwadratów są ortogonalne.

$$L_1 = \begin{bmatrix} 0\,1\,2\,3\,4 \\ 1\,2\,3\,4\,0 \\ 2\,3\,4\,0\,1 \\ 3\,4\,0\,1\,2 \\ 4\,0\,1\,2\,3 \end{bmatrix}, L_2 = \begin{bmatrix} 0\,1\,2\,3\,4 \\ 2\,3\,4\,0\,1 \\ 4\,0\,1\,2\,3 \\ 1\,2\,3\,4\,0 \\ 3\,4\,0\,1\,2 \end{bmatrix},$$

$$L_3 = \begin{bmatrix} 0\,1\,2\,3\,4 \\ 3\,4\,0\,1\,2 \\ 1\,2\,3\,4\,0 \\ 4\,0\,1\,2\,3 \\ 2\,3\,4\,0\,1 \end{bmatrix}, L_4 = \begin{bmatrix} 0\,1\,2\,3\,4 \\ 4\,0\,1\,2\,3 \\ 3\,4\,0\,1\,2 \\ 2\,3\,4\,0\,1 \\ 1\,2\,3\,4\,0 \end{bmatrix}.$$

Kwadraty te zostały znalezione według następującej reguły wykorzystującej arytmetykę modulo 5. Niech $a \in \mathbb{Z}_5^*$ i niech $L_a(i,j)$ oznacza element na pozycji (i,j) w kwadracie L_a, gdzie $i,j \in \mathbb{Z}_5$. Wówczas

$$L_a(i,j) = ai + j.$$

Twierdzenie 75 *Niech p będzie nieparzystą liczbą pierwszą. Wówczas, jeśli $a \neq 0$, to L_a jest kwadratem łacińskim. Ponadto, dla dowolnych $a, b \in \mathbb{Z}_p^*$, $a \neq b$, kwadraty L_a i L_b są ortogonalne.*

Dowód. Przypuśćmy, że dwa elementy kolumny j w kwadracie L_a są identyczne, powiedzmy

$$L_a(i_1, j) = L_a(i_2, j).$$

Wobec definicji kwadratu L_a to oznacza, że

$$ai_1 + j = ai_2 + j$$

a stąd

$$ai_1 = ai_2.$$

Ponieważ $a \neq 0$ więc $i_1 = i_2$. Podobnie dowodzimy, że elementy w wierszu nie mogą się powtarzać.

Dla dowodu drugiej części twierdzenia przypuśćmy, że dla dwóch różnych par $(x,y) \neq (r,s)$ elementów $\mathbb{Z}_p$ zachodzi

$$(L_a(x,y), L_b(x,y)) = (L_a(r,s), L_b(r,s)).$$

To oznacza, że

$$L_a(x,y) = L_a(r,s) \text{ i } L_b(x,y) = L_b(r,s),$$

a zatem

$$ax + y = ar + s \text{ i } bx + y = br + s.$$

Odejmując te równania stronami dostajemy

$$(a - b)x = (a - b)r,$$

co pociąga za sobą $x = r$, wobec $a - b \neq 0$. i $y = s$, a więc $(x, y) = (r, s)$ wbrew założeniu. ■

Nasuwa się naturalne pytanie: dla jakich n istnieje zbiór $n-1$ parami ortogonalnych kwadratów łacińskich rzędu n? Do dziś nie znamy pełnej odpowiedzi na to pytanie. Wykorzystując teorię *ciał skończonych* można jedynie uogólnić ostatnie twierdzenie na dowolną potęgę liczby pierwszej p^k.

Problem 76 *Czy istnieje liczba $n > 2$ różna od potęgi liczby pierwszej, dla której istnieje $n - 1$ wzajemnie ortogonalnych kwadratów łacińskich rzędu n?*